Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА КОМП’ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ЗВІТ  
З ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ №1

За дисципліною «Моделювання природничих процесів»

Виконала   
студентка групи ПА-20-1з  
Мовсісян Лаура Ростомівна

Дніпро  
2024

1. Мета роботи:

Ознайомитись з побудовою математичних моделей вільного і обмеженого зростання популяцій (моделі Мальтуса, Ферхюльста)

2. Варіант завдання - №3





У початковий момент часу t 0 кількісний склад деякого біологічного виду дорівнює N0 одиниць. Потрібно зробити прогноз чисельності N(t) даної популяції при t ≥ t 0 для двох випадків:

− відносний темп приросту популяції не залежить від її чисельності і

дорівнює постійній величині r ,

− відносний темп приросту популяції залежить від її чисельності і

дорівнює величині r − bN(t) (обмежений зростання популяції).

Для цього необхідно виконати наступні пункти:

1. Скласти математичну модель вільного росту популяції у вигляді лінійного диференціального рівняння, знайти аналітичний розв'язок рівняння;

2. Скласти математичну модель обмеженого зростання популяції у вигляді диференціального рівняння Бернуллі, знайти розв'язок рівняння при заданих початкових умовах.

3. Побудувати графіки зміни чисельності для моделей вільного і обмеженого зростання популяції.

3. Математична модель вільного росту популяції і її аналітичний розв'язок.

Ми знаємо, що відносний темп приросту популяції не залежить від її чисельності і дорівнює постійній величині r.

Лінійне диференціальне рівняння для вільного росту популяції має вигляд:

Изображение выглядит как Шрифт, текст, белый, дизайн

Автоматически созданное описание

Очевидно, це є модель Мальтуса, в якій коефіцієнт народжуваності α(t) = r є постійною величиною, а коефіцієнт смертності дорівнює нулю β(t) = 0.

Загальним розв'язком цього рівняння є функція N = Cert , де C – довільна постійна величина. Згідно з початковим умовою при t = t0 повинно бути N = N0 , и тоді N0 = Ce rt0 . Отже, C = N0 e −rt0 . Остаточно отримаємо, що чисельність популяції змінюється за експоненціальним законом

Изображение выглядит как Шрифт, белый, текст, каллиграфия

Автоматически созданное описание

4. Математична модель обмеженого зростання популяції. Аналітичний та чисельний розв'язок відповідного диференціального рівняння

Припустимо, що відносний темп приросту популяції сповільнюється зі зростанням її кількості, тобто відношення убуває зі збільшенням N(t) . Якщо це спадання лінійно, то математично цей факт можна записати у вигляді:

Изображение выглядит как Шрифт, белый, текст, дизайн

Автоматически созданное описание

де постійна b > 0. Звідси випливає, що має місце диференціальне рівняння:

Изображение выглядит как Шрифт, текст, линия, типография

Автоматически созданное описание де k = .

Це рівняння є окремим випадком відомого в математиці диференціального рівняння Бернуллі. Зробимо в цьому рівнянні заміну змінних:

Изображение выглядит как Шрифт, белый, символ, Графика

Автоматически созданное описание

і отримаємо

Изображение выглядит как линия, Шрифт, диаграмма, дизайн

Автоматически созданное описаниеабо Изображение выглядит как линия, Шрифт, типография, дизайн

Автоматически созданное описание

Таким чином, рівняння звелося до лінійного диференціального рівняння першого порядку. Загальним розв'язком останнього рівняння є функція:

Изображение выглядит как Шрифт, снимок экрана, белый, типография

Автоматически созданное описание

Отже, загальним розв'язком рівняння є функція:

Изображение выглядит как Шрифт, рукописный текст, линия, белый

Автоматически созданное описание

З урахуванням початкової умови N(t0)=N0 отримаємо, що:

Изображение выглядит как Шрифт, линия, дизайн, типография

Автоматически созданное описание

Тоді частинним розв'язком рівняння буде функція:

Изображение выглядит как Шрифт, текст, рукописный текст, линия

Автоматически созданное описание

5. Графіки зміни чисельності для моделей вільного і обмеженого зростання популяції.

Фіолетовий колір – Вільне зростання

Рожеве колір – Обмежене зростання

Изображение выглядит как линия, График, снимок экрана

Автоматически созданное описание

6. Висновки.

Під час виконання лабораторної роботи ми ознайомились з побудовою математичних моделей вільного і обмеженого зростання популяцій, відомих як моделі Мальтуса та Ферхюльста.

Модель Мальтуса виражає ріст популяції, що пропорційний кількості індивідів, без зваження на обмеження ресурсів. Ця модель використовує експоненціальну функцію для опису росту популяції з часом.

Модель Ферхюльста враховує обмежену доступність ресурсів для популяції, що призводить до наявності носія населення. У цій моделі ріст популяції спочатку прискорюється, але з часом він зменшується до стаціонарного рівня.

Ми написали програму, яка обчислювала значення популяції за допомогою цих математичних моделей та будувала відповідні графіки. Використовуючи отримані результати, ми змогли візуалізувати динаміку зростання популяцій та порівняти поведінку росту відповідно до обох моделей.

Отже, ця лабораторна робота дозволила нам краще зрозуміти та порівняти моделі вільного і обмеженого зростання популяцій, а також використати програмні засоби для аналізу та візуалізації даних.

7. Лістинг програми

<div id="k"></div>

<!DOCTYPE html>

<html lang="en">

<head>

<meta charset="UTF-8">

<meta name="viewport" content="width=device-width, initial-scale=1.0">

<title>Population Growth</title>

<script src="https://cdn.jsdelivr.net/npm/chart.js"></script>

</head>

<body>

<canvas id="populationChart" width="600" height="200"></canvas>

<script>

document.addEventListener('DOMContentLoaded', function () {

var ctx = document.getElementById('populationChart').getContext('2d');

var t0 = 12; // start time

var N0 = 51; // initial population size

var r = 1.52; // growth rate

var k = 82; // maximum population size (medium capacity)

var dataFreeGrowth = []; // data for the free growth model

var dataLimitedGrowth = []; // data for the limited growth model

var labels = []; // time stamps

for (var t = t0; t <= 25; t++) {

// The free growth model

var NtFree = N0 \* Math.exp(r \* (t - t0));

dataFreeGrowth.push(NtFree);

// Модель обмеженого зростання (логістична модель)

var NtLimited = (N0 \* k \* Math.exp(r \* (t - t0))) / (k + N0 \* (Math.exp(r \* (t - t0)) - 1));

dataLimitedGrowth.push(NtLimited);

// Add a time stamp

labels.push(t);

}

var chart = new Chart(ctx, {

type: 'line',

data: {

labels: labels,

datasets: [{

label: 'Вільне зростання',

backgroundColor: 'rgb(754, 762, 235)',

borderColor: 'rgb(155, 99, 132)',

data: dataFreeGrowth,

fill: false,

}, {

label: 'Обмежене зростання',

backgroundColor: 'rgb(754, 762, 235)',

borderColor: 'rgb(754, 162, 735)',

data: dataLimitedGrowth,

fill: false,

}]

},

options: {

scales: {

y: {

beginAtZero: true,

max:100

}

}

}

});

});

</script>

</body>

</html>

6. Контрольні питання

1. Модель Мальтуса. Зміна чисельності популяції з часом. Нереальність моделі.

Модель Мальтуса є однією з класичних теорій народонаселення, яка вперше була представлена Томасом Робертом Мальтусом в його праці "Ессе про принцип народонаселення" у 1798 році. Згідно з цією моделлю, зростання населення має тенденцію до експоненційного збільшення, тоді як доступні ресурси, такі як харчі та земля, зростають лише аритметично. Ця нерівність веде до того, що населення, в кінцевому підсумку, перевищує межі, які можуть забезпечити достатні ресурси для всіх, що призводить до масового голоду, хвороб та смертності, і відповідно до Мальтуса, до природним механізмам регуляції населення.

Незважаючи на значний вплив Мальтусіанської моделі на економіку та демографію, існують критики, які вказують на ряд нереальностей чи недоліків цієї моделі:

Ігнорування технологічних змін: Модель Мальтуса не враховує можливості технологічного прогресу, який може покращити ефективність виробництва харчів та інших ресурсів, тим самим збільшуючи їх доступність для більшого населення.

Культурні та соціальні чинники: Модель Мальтуса не враховує вплив культурних та соціальних чинників на рівень народжуваності та смертності. Наприклад, зміни у ставленні до ролі жінок в суспільстві, освітній політиці та доступ до контрацепції можуть вплинути на рівень народжуваності.

Міграція: Модель Мальтуса не враховує вплив міграції на зміну розмірів населення в різних регіонах. Міграція може впливати на зростання або зменшення чисельності популяції в певних областях.

Соціальні програми та політика: Дії держави у сфері соціальної політики, такі як програми соціального забезпечення, можуть впливати на рівень смертності та народжуваності, що не враховується в моделі Мальтуса.

Отже, модель Мальтуса, хоча і є важливим історичним вкладом у розвиток економічної теорії та демографії, має свої обмеження і нереалістичні передбачення в сучасному світі. Для розуміння сучасних динамік народонаселення необхідно враховувати більш широкий спектр чинників, які впливають на нього.

2. Математична модель вільного росту популяції. Загальне і приватне рішення диференціального рівняння.

Математична модель вільного росту популяції є однією з базових моделей в екології та демографії, яка описує динаміку зростання чисельності популяції відповідно до її природних процесів. Ця модель базується на диференціальному рівнянні, що описує зміну чисельності популяції з часом.

**Загальне рішення диференціального рівняння вільного росту популяції:**

Для моделі вільного росту популяції, основним диференціальним рівнянням є рівняння логістичної кривої, яке можна записати наступним чином:

де:

* *N* - чисельність популяції у момент часу *t*,
* *r* - коефіцієнт приросту популяції (швидкість росту популяції).

Це диференціальне рівняння першого порядку, яке можна вирішити за допомогою інтегрування.

### Приватне рішення диференціального рівняння:

Якщо вважати, що початкова чисельність популяції *N*(0)=*N*0​, то приватне рішення цього диференціального рівняння виглядає так:



Це рішення вказує на те, що чисельність популяції зростатиме експоненційно з часом зі швидкістю *r*, пропорційною поточній чисельності популяції.

Висновок:

Математична модель вільного росту популяції і її рішення дають базовий уявлення про динаміку зростання популяції відповідно до її природних процесів. Вона є важливою для розуміння динаміки популяцій в природних та господарських системах і надає основу для подальших досліджень і аналізу в екології, демографії та інших суміжних галузях науки.

3. Математична модель обмеженого зростання популяції. Умова виникнення моделі. Загальне і приватне рішення диференціального рівняння.

Математична модель обмеженого зростання популяції, також відома як логістична модель, враховує обмежену доступність ресурсів для популяції та її природній приріст. Ця модель виникає в умовах, коли популяція зростає, але її здатність до подальшого зростання обмежена обсягом доступних ресурсів (їжа, простір, вода тощо).

### Умова виникнення моделі:

Модель обмеженого зростання популяції виникає, коли популяція має можливість зростати зі швидкістю пропорційною поточній чисельності, але цей ріст обмежений відносною ємністю середовища, тобто максимальною кількістю особин, яку середовище може підтримувати.

### Диференціальне рівняння логістичної моделі:

Диференціальне рівняння, що описує модель обмеженого зростання популяції (логістична модель), має вигляд:

Изображение выглядит как Шрифт, текст, диаграмма, линия

Автоматически созданное описание

де:

* *N* - чисельність популяції у момент часу *t*,
* *r* - коефіцієнт приросту популяції,
* *K* - ємність середовища (максимальна чисельність популяції, яку середовище може підтримувати).

**Загальне рішення диференціального рівняння:**

Загальне рішення диференціального рівняння для логістичної моделі може бути складним і відображати складнощі у взаємодії між популяцією та середовищем. Проте, у загальному випадку, воно може бути представлене у вигляді інтегрального виразу.

Загальне рішення диференціального рівняння:

Загальне рішення диференціального рівняння для логістичної моделі може бути складним і відображати складнощі у взаємодії між популяцією та середовищем. Проте, у загальному випадку, воно може бути представлене у вигляді інтегрального виразу.

Приватне рішення диференціального рівняння:

Якщо вважати, що початкова чисельність популяції

N(0)=N0 , то приватне рішення цього диференціального рівняння може бути визначене шляхом розв'язання інтегрального виразу або чисельно.

Висновок:

Модель обмеженого зростання популяції (логістична модель) є важливим інструментом для розуміння динаміки популяцій у природних та господарських системах. Вона враховує обмежену доступність ресурсів для популяції та природні процеси зростання, що дозволяє передбачити стабільність популяції на певному рівні в межах обсягу середовища.

4. Припущення для побудови моделей вільного і обмеженого зростання популяції. Властивості логістичної функції

При побудові моделей вільного і обмеженого зростання популяції використовуються певні припущення, а також властивості логістичної функції. Давайте розглянемо їх детальніше:

**Припущення для побудови моделей вільного і обмеженого зростання популяції:**

1. **Відсутність впливу зовнішніх факторів**: Припускається, що популяція розвивається в ізольованому середовищі без зовнішніх впливів, які можуть впливати на її ріст або зменшення.
2. **Контрольованість розмноження**: Припускається, що рівень розмноження популяції контрольований внутрішніми механізмами (наприклад, народженість та смертність) і не залежить від зовнішніх факторів.
3. **Постійний коефіцієнт приросту**: Припускається, що коефіцієнт приросту (рівень розмноження) популяції залишається сталим протягом часу. Це може бути прийнятно для коротких періодів аналізу, але на практиці може змінюватися через різні фактори, такі як ресурси або вплив людської діяльності.

**Властивості логістичної функції:**

Логістична функція використовується для опису моделі обмеженого зростання популяції. Вона має наступні властивості:

1. **Монотонність**: Логістична функція є монотонно зростаючою на проміжку (−∞,*K*) та монотонно спадаючою на проміжку (*K*,∞), де *K* - ємність середовища.
2. **Обмеженість**: Логістична функція обмежена відносно *y*-осі. Її значення лежать у проміжку (0,*K*), де *K* - ємність середовища.
3. **Симетрія відносно точки *K*/2**: Логістична функція є симетричною відносно точки *K*/2, де *K* - ємність середовища.
4. **Похідні в точках екстремуму**: Похідні логістичної функції в точках екстремуму (максимуму або мінімуму) рівні нулю.

**Висновок:**

Припущення для побудови моделей вільного і обмеженого зростання популяції надають основу для математичного моделювання динаміки популяцій. Властивості логістичної функції відображають її основні характеристики та дозволяють застосовувати її для опису обмеженого зростання популяції відповідно до доступних ресурсів.

Начало формы